Annex

From: Interlibrary Loan <illnotify@library.rochester.edu>
Sent: Friday, September 07, 2012 1:06 PM
To: annex@library.rochester.edu
Subject: Lending Request - Annex Interlibrary Loan

*** Generated by the Interlibrary Loan System ***

Call Number: AS222 .A24a

Journal Title: Atti della Accademia delle scienze di Torino.
Article Author: Tanturri, A
Article Title: Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di 2

Journal Vol: 54 Journal Issue:
Journal Month: Journal Year: 1918
Article Pages: 97-110

Branch Location: ANNEX 1 -- photocopy

This request has been forwarded from ILLiad by angelav.
ILLiad Transaction Number: 736975
ILLiad ILL Number: 94464919
Shipping Option: Odyssey

Requesting Library: CUNY Graduate School

Dalle (1) e (3) segue:

$$V_{r+s}\sqrt{a} \in v + x - (0 \cdots 1)\, X^{-r-s},$$

che è il teorema 5.

La condizione $s < (20\ 9)\, X^{r-s}$ è soddisfatta per $r = 2$ ed $s = 2$; cioè avute 2 cifre decimali di $\sqrt{a}$, se ne trovano altre 2 con la divisione di grado 5; così si ritrovano i teoremi 3 e 4.

Essa è soddisfatta per $s = r - 1$, ove $r \leqq 23$, cioè calcolate r cifre decimali di $\sqrt{a}$, finchè $r \leqq 23$, se ne trovano altre $r - 1$, colla divisione di grado $2r + 1$.

Essa è soddisfatta per $s = r - 2$, ove $r \leqq 224$; cioè calcolate r cifre decimali di $\sqrt{a}$, finchè $r \leqq 224$, se ne trovano altre $r - 2$ colla divisione graduale. E così via.

Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di 2

Nota di ALBERTO TANTURRI

Ogni numero naturale ammette, com'è noto, una sola partizione in potenze intere, tutte disuguali, di 2: e, trovarla, equivale a scrivere il numero nel sistema binario di numerazione. Quante sono, ora, le partizioni d'un numero in potenze di 2, anche uguali fra loro?

Nei n[i] 50, 51 e 52 della Memoria *De partitione numerorum* del t. III *Novi Comm. Petrop.* (1750-51), EULERO trattò questo problema, giungendo a una formula di riduzione, che permette di risolverlo in ogni caso numerico particolare. Con questo scritto comincio lo studio d'una questione più generale: uno studio più completo sarà oggetto d'un altro lavoro.

Definizione del numero sopradetto.

1. — Essendo n un numero naturale, indicheremo con D_n il numero delle nostre partizioni. Vale a dire il numero delle soluzioni in interi a della condizione:

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \dots = n;$$

nel primo membro della quale possiam fermarci al termine il cui coefficiente è la massima potenza di 2 che non superi n, ossia $= 2$ elevato alla caratteristica, k, del logaritmo di n in base 2. Coi simboli del *Formulario Mathematico*:

(1) $$n \in N_1 \,.\, k = E(^2\mathrm{Log}\, n) \,.\, \supset .$$
$$D_n = \mathrm{num}\, \{ (N_0 F 0 \cdots k) \frown a \ni [\Sigma (2^i a_i | i, 0 \cdots k) = n] \} \qquad \text{Def.}$$

Porremo pure:

(2) $$D_0 = 1 \qquad \text{Def.}$$

I tre teoremi d'EULERO.

2. — Come primo teorema d'EULERO si può assumere la semplice formula:

$$(3) \qquad x \in -1^{-}1 \,.\supset.\, 1/\Pi\,[(1-x^i) \,|\, i, 2^{N_0}] = \Sigma\,(D_i x^i \,|\, i, N_0);$$

la quale dice che, se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, la funzione fratta $1/(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\ldots$ è uguale alla serie:

$$1 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + D_4 x^4 + \ldots.$$

3. — La qual serie dovrà, come la funzione fratta, condurre a uno stesso risultato, sia con la moltiplicazione per $1-x$, che con la sostituzione di x^2 al posto di x. Abbiamo dunque che:

$$\begin{array}{l} 1 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + D_4 x^4 + \ldots \\ -\quad x - D_1 x^2 - D_2 x^3 - D_3 x^4 - \ldots = 1 + \quad D_1 x^2 + \quad D_2 x^4 + \quad \ldots; \end{array}$$

cioè, uguagliando i coefficienti di $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$, che, in generale:

$$(4) \qquad n \in N_1 \,.\supset.\, D_n = D_{n-1} + \text{rest}\,(n-1, 2)\, D_{E(n/2)}.$$

Questa formula di riduzione, o l'equivalente:

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad D_1 = D_0 \\ h \in N_1 \,.\supset.\, D_{2h+1} = D_{2h} = D_{2h-1} + D_h, \end{array} \right.$$

costituisce il secondo teorema d'EULERO; e, con la (2), ci dà per:

D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7 D_8 D_9 D_{10} D_{11} D_{12} D_{13} D_{14} $D_{15}\ldots$,

successivamente, i valori:

1 1 2 2 4 4 6 6 10 10 14 14 20 20 26 26 ...,

il calcolo dei quali " *facillime, quousque libuerit, continuetur* ". Esprimere D_n indipendentemente dai precedenti D, non è, però, altrettanto facile: " *attendenti patebit nullo modo exprimi posse* ", afferma, anzi, EULERO, con un ragionamento poco persuasivo.

4. — Riman l'ultimo teorema. Il prodotto infinito $(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\ldots$ della (3), si sviluppi, perciò, nella serie $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$, dove $C_0 = 1$. Dovrà questa, come quel prodotto, riprodursi identicamente, quando vi si muti x in x^2, e si moltiplichi poi il risultato per $1-x$; cioè, identicamente:

$$\begin{array}{l} 1 \qquad\quad + C_1 x^2 \qquad\quad + C_2 x^4 \qquad + \ldots \\ \; - C_0 x \qquad\quad - C_1 x^3 \qquad\quad - \ldots \quad = \\ \qquad\qquad = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \ldots; \end{array}$$

e quindi, per ogni numero naturale n:

$$C_n = (-1)^n\, C_{E(n/2)}.$$

Questa formula di riduzione fornisce i coefficienti C; che, secondo EULERO, " *non obtinent legem solito more assignabilem* ", ma, col simbolo E, sono, fin da C_0, esprimibili così:

$$C_n = (-1)^{n + E(n/2) + E(n/4) + \ldots}.$$

E allora son pure noti i coefficienti della serie $D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots$, che, in virtù della (3), è ricorrente d'ordine infinito, con la scala di relazione, secondo la nomenclatura euleriana: $-C_1$, $-C_2$, $-C_3$; per l'appunto:

$$\begin{array}{l} D_1 = -C_1 D_0 \qquad\qquad\qquad , \\ D_2 = -C_1 D_1 - C_2 D_0 \qquad . \\ D_3 = -C_1 D_2 - C_2 D_1 - C_3 D_0, \text{ ecc.} \end{array}$$

Scriviamo in generale, e avremo il terzo teorema d'EULERO:

$$(5) \qquad n \in N_1 \,.\supset.\, D_n = -\Sigma\,[(-1)^{C_i} D_{n-i} \,|\, i, 1 \cdots n];$$

nel quale, per brevità, si è fatto uso d'un simbolo H, definito dalla:

$$(6) \qquad n \in N_0 . \supset . Hn = n + E(n/2) + E(n/4) + \ldots$$
$$= \Sigma \} [E(n/2^i)] | i, 0 \cdots E(^2\mathrm{Log}\, n) \{ \ (*) \qquad \mathrm{Def.}$$

Alcune conseguenze del secondo teorema d'Eulero.

5. — Il secondo teorema d'Eulero dà, per es., che $D_1 = D_0$, $D_2 = D_1 + D_1$, $D_3 = D_2$, $D_4 = D_3 + D_2$, $D_5 = D_4$, $D_6 = D_5 + D_3$, $D_7 = D_6$; sicchè, sommando: $D_7 = D_0 + D_1 + D_2 + D_3$. In generale:

$$(7) \qquad n \in N_1 . \supset . D_n = D_0 + D_1 + D_2 + \ldots + D_{E(n/2)}$$
$$= \Sigma [D_i | i, 0 \cdots E(n/2)];$$

e sarà dunque noto D_n, quando si conoscano i D con gl'indici da 0 a $E(n/2)$.

6. — Basta, anzi, conoscere i D con gl'indici da 0 a $E(n/4)$. Per es., nella:

$$D_{18} = D_0 + D_1 + D_2 + \ldots + D_9,$$

(*) Questo terzo teorema esprime il fatto che $= 1$ il prodotto delle serie $1 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots$ e $1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$; e dà, in generale, D_n come somma dei precedenti D, presi con segni convenienti: per n dispari, dice soltanto che $D_{2h+1} = D_{2h}$, per ogni intero h.

Si noti la formula:

$$x \in -1^{-}1 . \supset . \Pi [(1 - x^n) | n, 2^{N_0}] = \Sigma [(-1)^{Hn} x^n | n, N_0],$$

dove Hn è il numero definito dalla (6); che, per un noto teorema di Legendre, $= n + \mathrm{mp}(2, n!)$, ossia $= n +$ la massima potenza di 2 che divida il fattoriale di n, o anche $= \mathrm{mp}[2, (2n)!]$. Il numero C_n, che abbiam trovato uguale a $(-1)^{Hn}$, gode di curiose proprietà; e, per es., $= +1$ o a -1, secondochè n, nel sistema binario di numerazione, si scrive con un numero pari o dispari di cifre 1: la proprietà fondamentale, già scritta in Eulero, è la: $-C_{2h+1} = C_{2h} = C_h$, per ogni intero h.

che è caso particolare della (7), sostituiamo, ai successivi D del secondo membro, i valori dati dalla (7) stessa; per comodità, in successive colonne. Avremo che:

$$\begin{aligned} D_{18} = D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 + D_0 \\ + D_1 + D_1 + D_1 + D_1 + D_1 + D_1 + D_1 + D_1 \\ + D_2 + D_2 + D_2 + D_2 + D_2 + D_2 \\ + D_3 + D_3 + D_3 + D_3 \\ + D_4 + D_4, \end{aligned}$$

e quindi $= 10 D_0 + 8 D_1 + 6 D_2 + 4 D_3 + 2 D_4$. In generale:

$$(8) \qquad n \in N_1 . \supset . D_n = \Sigma \} [E(n/2) + 1 - 2i] D_i | i, 0 \cdots E(n/4) \{ .$$

7. — Possiam sostituire ancora, ai successivi D del secondo membro, i valori dati dalla (7). Avrò, per es., che:

$$\begin{aligned} D_{18} = 10 D_0 + 8 D_0 + 6 D_0 + 4 D_0 + 2 D_0 \\ + 6 D_1 + 4 D_1 + 2 D_1 \\ + 2 D_2, \end{aligned}$$

e quindi $\qquad = 30 D_0 + 12 D_1 + 2 D_2$. In generale:

$$(9) \qquad n \in N_1 . \supset .$$
$$D_n = \Sigma \} [E(n/4) + 1 - 2i] [E(n/4 + 1/2) + 1 - 2i] D_i | i, 0 \cdots E(n/8) \{ .$$

8. — E continuando, finchè è possibile, sempre con l'uso della (7), abbiamo un procedimento uniforme, a cui diamo veste di regola pratica. Chi voglia D_{2h} (o, che è lo stesso, D_{2h+1}), prepari una tabella, scrivendo, in un primo rigo, $h + 1$ simboli 1. Deduca poi ciascuno dei righi successivi dal precedente: scrivendo, sotto a ogni suo numero di posto dispari (da sinistra), la somma dei suoi numeri che vanno da quello che si considera all'ultimo (di destra); e lasciando in bianco sotto agli altri numeri. Varrà allora questa *legge*: $D_{2h} =$ somma dei D con gl'indici da 0 a h; $=$ somma dei D con gl'indici da 0 a $E(h/2)$, moltiplicati per i numeri del secondo rigo, ordinatamente; $=$ somma dei D con gl'indici da 0 a $E(h/4)$, moltiplicati per i numeri del terzo rigo, ordinatamente; ...; $=$ numero dell'ultimo rigo.

ESEMPIO. — Si voglia D_{36}. Faccio la tabella:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19		17		15		13		11		9		7		5		3		1
100				64				36				16				4		
220								56								4		
280																4		
284																		

; e posso scrivere che:

$$\begin{aligned} D_{36} &= D_0 + D_1 + D_2 + \dots + D_{16} + D_{17} + D_{18} \\ &= 19D_0 + 17D_1 + 15D_2 + \dots + 5D_7 + 3D_8 + D_9 \\ &= 100D_0 + 64D_1 + 36D_2 + 16D_3 + 4D_4 = 220D_0 + 56D_1 + 4D_2 \\ &= 280D_0 + 4D_1 \qquad\qquad = 284. \end{aligned}$$

9. — La tabella che così fornisce D_{2h}, dopo il primo rigo con $h+1$ simboli 1, ne contiene un secondo, con $E(h/2)+1$ numeri, l'$(i+1)^{mo}$ dei quali $= h+1-2i$, per i da 0 a $E(h/2)$; e, se $h \geq 2$, ne contiene un terzo, con $E(h/4)+1$ numeri, l'$(i+1)^{mo}$ dei quali, per i da 0 a $E(h/4)$, è dato da:

$$\{E(h/2)+1-2i\}\{E[(h+1)/2]+1-2i\} = E[(h/2+1-2i)^2] \ (*).$$

Compare un quarto rigo, con $E(h/8)+1$ numeri, quando $h \geq 4$; e un quinto, con $E(h/16)+1$ numeri, quando $h \geq 8$; ecc.: l'ultimo rigo, con un solo numero, ha sempre per numero d'ordine $E[{}^2\mathrm{Log}(2h)]+1$. Chi sapesse esprimere l'$(i+1)^{mo}$ numero dei righi quarto, quinto, ecc., potrebbe scriver formule da aggregarsi alle (7), (8) e (9); e si è così condotti, se si vuole una formula generale in questa direzione, a cercar l'espressione generale dei numeri della tabella: dei quali, poi, daremo, subito appresso, nella formula (22), il significato aritmetico.

Veramente, per trovare D_{2h}, possiam restringerci a tentar d'esprimere solo il primo numero di ciascun rigo: sebbene una tal semplificazione non sia che apparente; perchè, com'è facile

(*) Si applica il teorema d'aritmetica:

$$m \,\epsilon\, N_0 \,.\, \supset .\, E(m/2) \times E[(m+1)/2] = E[(m/2)^2].$$

Diverse proposizioni aritmetiche tralasceremo appresso di notare, per amor di brevità.

riconoscere, l'$(i+1)^{mo}$ numero del $(p+1)^{mo}$ rigo della tabella con cui si ottiene D_{2h} è uguale al primo numero dello stesso rigo della tabella con cui si otterrebbe il D con l'indice $2h - i \times 2^{p+1}$; e ciò nelle ipotesi generali:

$$h \,\epsilon\, N_1 \,.\, p \,\epsilon\, 0 \cdots E[{}^2\mathrm{Log}(2h)] \,.\, i \,\epsilon\, 0 \cdots E(h/2^p).$$

Si sa già intanto che esso primo numero $=1$, nel primo rigo; $= h+1$, nel secondo; e, nel terzo, $= E[(h/2+1)^2]$. Per calcolarlo nel quarto, sommo i numeri del terzo rigo, cioè gli $E(k/2)+1$ numeri: $(k+1)^2$, $(k-1)^2$, $(k-3)^2$, ..., ovvero: $(k+1)(k+2)$, $(k-1)k$, $(k-3)(k-2)$, ..., secondochè $h = 2k$ o a $2k+1$: e avrò, nel primo caso, il numero $C(k+3, 3)$; e, nel secondo, questo stesso numero aumentato di $(k+1) + (k-1) + (k-3) + \dots$, cioè di

$$\{E(k/2)+1\}\{E[(k+1)/2]+1\} \ (*).$$

Concludo che il primo numero del quarto rigo

$$= C[E(h/2)+3, 3]$$

o a $\quad$ „ $\qquad + E[(h+3)/4] \times E[(h+5)/4]$,

secondochè h è pari o dispari.

Altri risultati semplici non è facile ottenere. Si può, certo, scrivere il primo numero del quinto rigo come somma dei già espressi numeri del quarto; ma non si dispone poi d'una formula aritmetica che condensi la somma. Si può anche stabilire una formula che insegna a ottenere un rigo della tabella da uno qualunque dei precedenti: essa è caso particolare della

(*) Il simbolo C è l'ordinario simbolo delle combinazioni: dimodochè, per es., $C(4, 0) = 1$, $C(4, 1) = 4/1$, $C(4, 2) = (4 \times 3)/(1 \times 2)$, ecc. Con la formula elementare:

$$x \,\epsilon\, N_1 \,.\, \supset .\, x^2 = C(x+1, 2) + C(x, 2),$$

si trova che $(k+1)^2 + (k-1)^2 + (k-3)^2 + \dots = C(k+2, 2) + C(k+1, 2) + C(k, 2) + C(k-1, 2) + \dots$, cioè $= C(k+3, 3)$. La somma dei quadrati dei primi x numeri dispari è espressa con $x(4x^2-1)/3$, per es., in LUCAS, *Théorie des nombres*, p. 255.

successiva (23): e dà, per es., che il primo numero del quinto rigo $=$

$$a) \qquad \Sigma \{ [E(i/4)+1][E(i/4+1/2)+1](h+1-2i) \mid i, 0 \cdots E(h/2) \},$$

ovvero a

$$b) \qquad \Sigma \{ [E(i/2)+1][E(h/2)-2i+1][E(h/2+1/2)-2i+1] \mid i, 0 \cdots E(h/4) \},$$

secondochè lo deduciamo dai numeri del secondo ovvero da quelli del terzo rigo. Per es., il primo numero del quinto rigo della tabella che chiude il n° **8**, $= 1\times 19 + 1\times 17 + 2\times 15 + 2\times 13 + 4\times 11 + 4\times 9 + 6\times 7 + 6\times 5 + 9\times 3 + 9\times 1$, ovvero a $1\times 100 + 1\times 64 + 2\times 36 + 2\times 16 + 3\times 4$. Ma, anche qui, manca una formula aritmetica, che condensi, convenientemente, una delle due somme; come manca per l'espressione

$$c) \qquad \Sigma \{ [E(i/4)+1][E(i/4+1/2)+1][E(h/2)-2i+1][E(h/2+1/2)-2i+1] \mid i, 0 \cdots E(h/4) \}$$

del primo numero del sesto rigo, dedotto, alla stessa maniera, dai numeri del terzo. Quest'ultima espressione dà, per es., che il primo numero del sesto rigo della tabella del n° **8**, $= 1\times 100 + 1\times 64 + 2\times 36 + 2\times 16 + 4\times 4$ (*).

(*) Come altra conseguenza della (4):

$$h \in N_1 . \supset . 2D_{4h} = D_{4h-2} + D_{4h+2}:$$

perchè: $\quad D_{4h+2} = D_{4h+1} + D_{2h+1} = D_{4h} + D_{2h},$

e $\quad D_{4h} = D_{4h-1} + D_{2h} = D_{4h-2} + D_{2h}.$

Più in generale:

$$n \in N_0 . \supset . D_{n+3} - D_{n+2} - D_{n+1} + D_n = \{ E[(n+3)/4] - E[(n+2)/4] \} D_{E(n/4)};$$

come si può trovare osservando che, in virtù della (3), la serie $D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots$ deve condurre a uno stesso risultato, sia con la moltiplicazione per $(1-x)(1-x^2)$, che con la sostituzione di x^4 al posto di x.

Un problema più ampio di quello d'EULERO.

10. — Delle D_n partizioni di n in potenze di 2, ve n'è sempre una formata da n elementi tutti uguali a 1. Quando $n \geq 2$, ve n'è poi di quelle che han 2 come elemento massimo; e siano $D(2, n)$: e, quando $n \geq 4$, ve n'è delle altre, e siano $D(4, n)$, che han 4 come elemento massimo: ecc. In generale, indico con $D(2^p, n)$ il numero di quelle che han come elemento massimo 2^p: precisamente, scrivo la definizione:

$$(10) \qquad p \in N_0 . n \in N_1 . \supset . D(2^p, n) = \text{num} \{ (N_0 F 0 \cdots p) \frown a \ni [a_p \sim = 0 . \Sigma(2^i a_i \mid i, 0 \cdots p) = n] \} \quad \text{Def.}$$

E propongo il problema della determinazione del numero $D(2^p, n)$.

Questo problema è più generale di quello euleriano della determinazione di D_n; perchè, con la formula elementare:

$$(11) \qquad n \in N_1 . \supset . D_n = D(1, n) + D(2, n) + D(4, n) + D(8, n) + \ldots = \Sigma [D(2^i, n) \mid i, 0 \cdots E({}^2\text{Log}\, n)].$$

il calcolo di D_n si fa mediante quello di alcuni D con due indici. Anzi, in ogni caso, mediante quello di uno solo di tali D: in virtù del teorema:

$$(12) \qquad h \in N_0 . p \in N_1 . h < 2^p . \supset . D_{2h} = D_{2h+1} = D(2^p, 2^p + 2h).$$

Esso teorema è evidente quando $h = 0$; e, quando $h > 0$, è ottenibile osservando che, per es., $D_{10} = D(8, 8 + 10)$, perchè, se aggrego 8 alle partizioni di 10 in potenze di 2, ottengo, per l'appunto, quelle partizioni di 18 in potenze di 2, che han 8 come elemento massimo. Il 2^p che si aggrega dev'essere almeno uguale alla massima potenza di 2 che $\leq 2h$ (*).

(*)

$$(12') \qquad n, k \in N_0 . \supset : n < 2^{k-1} . = . D_n = D(2^k, 2^k + n).$$

11. — Accanto alla (11) vogliam subito porre la:

$$(13)\qquad n \in 1 + \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, \Sigma\,[(-1)^i\,\mathrm{D}\,(2^i, n) \mid i,\, 0 \cdots \mathrm{E}\,({}^2\mathrm{Log}\, n)] = 0.$$

Considero, infatti, le partizioni di n in potenze di 2.

a_0) Con $\mathrm{D}\,(1, n)$ si numerano quelle, e ce n'è una sola, che son formate da tanti 1.

a_1) Di quelle numerate con $\mathrm{D}\,(2, n)$: a_1') alcune, e ce n'è una sola, contengono un solo 2; a_1'') e le altre ne contengono più d'uno.

a_2) Di quelle numerate con $\mathrm{D}\,(4, n)$: a_2') alcune contengono un solo 4; a_2'') e le altre ne contengono più d'uno.

. . . .

a_k) Pongo, finalmente, $k = \mathrm{E}\,({}^2\mathrm{Log}\, n)$: dimodochè ${}^2\mathrm{Log}\, n < k + 1$, cioè $n < 2^{k+1}$. Con $\mathrm{D}\,(2^k, n)$ si numerano quelle che contengono un solo 2^k, non essendovene di quelle che ne contengono più d'uno.

Se, per brevità, indico con $\mathrm{D}a_0$, $\mathrm{D}a_1'$ e $\mathrm{D}a_1''$, $\mathrm{D}a_2'$ e $\mathrm{D}a_2''$, ..., $\mathrm{D}a_k$, i numeri delle partizioni di cui si parla in a_0, a_1' e a_1'', a_2' e a_2'', ..., a_k, ho subito che ciascuno di essi numeri è uguale al seguente: e, per es., $\mathrm{D}a_1'' = \mathrm{D}a_2'$, come si vede con la sostituzione di un elemento 4 a due elementi 2. E allora, evidentemente: $\mathrm{D}(1,n) - \mathrm{D}(2,n) + \mathrm{D}(4,n) - \mathrm{D}(8,n) + \ldots$, cioè: $\mathrm{D}a_0 - (\mathrm{D}a_1' + \mathrm{D}a_1'') + (\mathrm{D}a_2' + \mathrm{D}a_2'') - \ldots + (-1)^k\,\mathrm{D}a_k$, $= 0$, come si era asserito.

Alcune proprietà dei numeri $\mathrm{D}\,(2^p, n)$.

12. — Dalla definizione, immediatamente:

$$\begin{array}{lll}
(14) & p \in \mathrm{N}_0 \,.\, n \in \mathrm{N}_1 \,.\, n < 2^p \,.\, \supset .\, \mathrm{D}\,(2^p, n) = 0 & , \\
(15) & \quad ,, \quad . \qquad\qquad\quad \supset .\, \mathrm{D}\,(2^p, 2^p) = 1 & , \\
(16) & \qquad\quad ,, \quad . \qquad \supset .\, \mathrm{D}\,(1, n) = 1 & , \\
(17) & \quad ,, \;.\; ,, \;. \qquad \supset .\, \mathrm{D}\,(2^p, 2n + 1) = \mathrm{D}\,(2^p, 2n) & ;
\end{array}$$

quest'ultima perchè le partizioni numerate nel primo membro dell'uguaglianza son quelle numerate nel secondo, con l'aggiunta, in ciascuna, d'un 1.

13. — Semplicemente si ottiene pure la:

$$(18)\qquad n, p \in \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, \mathrm{D}\,(2^p, 2^p + n) = \mathrm{D}\,(2^p, n) + \mathrm{D}\,(2^{p-1}, 2^{p-1} + n),$$

osservando che, delle partizioni numerate nel primo membro dell'uguaglianza, alcune contengono più di un elemento uguale a 2^p; e son $\mathrm{D}\,(2^p, n)$, come si vede sopprimendo, in ciascuna, uno di tali elementi: e le altre ne contengono uno solo: e son $\mathrm{D}\,(2^{p-1}, 2^{p-1} + n)$, come si vede sostituendo, in ciascuna, quell'elemento con un elemento uguale a 2^{p-1}.

Questa proprietà si può ritenere come fondamentale. Essa permette di calcolare $\mathrm{D}\,(2^p, n)$ per ogni p ed n, partendo dalle (14), (15) e (16).

14. — Una sua facile conseguenza è la:

$$(19)\qquad n \in \mathrm{N}_1 \,.\, p \in \mathrm{N}_0 \,.\, \supset .\, \mathrm{D}\,(2^p, 2^p + n) = \Sigma\,[\mathrm{D}\,(2^i, n) \mid i,\, 0 \cdots p].$$

che dà il significato della somma della (11) limitata al primo termine, o ai primi due termini, o ai primi tre termini, ecc. Per es.:

$$\mathrm{D}\,(1, 18) + \mathrm{D}\,(2, 18) + \mathrm{D}\,(4, 18) + \mathrm{D}\,(8, 18) = \mathrm{D}\,(8, 26);$$

perchè, applicando, ripetutamente, la (18):

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,(8, 26) &= \mathrm{D}\,(8, 18) + \mathrm{D}\,(4, 22) = \mathrm{D}\,(8, 18) + \mathrm{D}\,(4, 18) + \mathrm{D}\,(2, 20) \\
&= \quad ,, \quad + \mathrm{D}\,(4, 18) + \mathrm{D}\,(2, 18) + \mathrm{D}\,(1, 19);
\end{aligned}$$

e $\mathrm{D}\,(1, 19) = \mathrm{D}\,(1, 18)$.

Ma la (18) si può applicare, ripetutamente, anche così:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,(8, 26) &= \mathrm{D}\,(4, 22) + \mathrm{D}\,(8, 18) = \mathrm{D}\,(4, 22) + \mathrm{D}\,(4, 14) + \mathrm{D}\,(8, 10) = \\
&= \mathrm{D}\,(4, 22) + \mathrm{D}\,(4, 14) + \mathrm{D}\,(4, 6).
\end{aligned}$$

In generale, si ha la formula:

$$\begin{aligned}
(20)\qquad h, p \in \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, &\mathrm{D}\,(2^p, 2^p + 2h) = \\
&\Sigma\,[\mathrm{D}\,(2^{p-1}, 2^{p-1} + 2h - i \times 2^p) \mid i,\, 0 \cdots \mathrm{E}\,(h / 2^{p-1})];
\end{aligned}$$

che esprime $\mathrm{D}\,(2^p, 2^p + 2h)$ mediante tanti $\mathrm{D}\,(2^{p-1}, n)$ quanti sono i $2^{p-1} + 2h - \mathrm{N}_0 \times 2^p$ non minori di 2^{p-1}; cioè quanti sono gli N_0 non maggiori di $2h / 2^p$.

E dalla quale, per induzione rispetto a p, trarremo due conseguenze. Prima di tutto:

(21) $h, p \in N_0 . \supset : D(2^p, 2^p + 2h) \in 2N_0 + 1 . = . h \in N_0 \times 2^p$;

che afferma dispari $D(2^p, 2^p + 2h)$ solo quando h è un multiplo di 2^p. E, in secondo luogo:

(22) $h \in N_1 . p \in 0 \cdots E[{}^2\mathrm{Log}(2h)] . i \in 0 \cdots E(h/2^p) . \supset .$
l'$(i+1)^{mo}$ numero del $(p+1)^{mo}$ rigo della tabella con cui si ottiene D_{2h}, secondo il metodo del numero **8**. $= D(2^p, 2^p + 2h - i \times 2^{p+1})$.

Sia dell'una che dell'altra conseguenza, non scriviamo, per brevità, la dimostrazione.

15. — Quando $p > 1$, a ciascun termine della somma della (20) si può, poi, applicare la stessa formula (20): e si ha $D(2^p, 2^p + 2h)$ espresso mediante tanti $D(2^{p-2}, n)$: a ciascun dei quali si può applicar pure la formula stessa, se $p > 2$. Si giunge così al teorema generale:

(23) $h, p \in N_1 . k \in 0 \cdots p-1 . \supset . D(2^p, 2^p + 2h) =$
$\Sigma [D(2^k, 2^k + i) D(2^{p-k-1}, 2^{p-k-1} + 2h - i \times 2^{k+1}) | i, 0 \cdots E(h/2^{p-k-1})]$:

che, quando $h < 2^p$, e quindi, per la (12), $D(2^p, 2^p + 2h) = D_{2h}$, esprime la *legge* enunciata nel n° **8**: per l'appunto, la dà a ritroso, se facciamo, successivamente, $k = 0$, $k = 1$, ..., $k = p - 1$. Questo stesso teorema generale può fornir, per es., le espressioni *a)* e *b)* del primo numero del quinto rigo, e l'espressione *c)* del primo numero del sesto rigo della tabella dello stesso n° **8**: come compaiono nel n° **9**: si porrà $p = 4$ e $k = 2$, e $p = 4$ e $k = 1$, e poi $p = 5$ e $k = 2$.

16. — Chiudiamo, osservando che la (22) e la fine del n° **9** dànno:

(24) $h \in N_0 . \supset . D(2, 2 + 2h) = h + 1$.
(25) " $. \supset . D(4, 4 + 2h) = E[(h/2 + 1)^2]$.

(26) $h \in N_0 . \supset . D(8, 8 + 2h) = C[E(h/2) + 3, 3] +$
$\mathrm{rest}(h, 2) \times E[(h+3)/4] \times E[(h+5)/4]$.
(27) " $. \supset . D(16, 16 + 2h) =$ espress. *a)*, ovvero *b)*, del n° **9**.
(28) " $. \supset . D(32, 32 + 2h) =$ " *c)* , " (*).

Serie che han per coefficienti i numeri $D(2^p, 2^p + n)$.

17. — "Se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, e se p è un numero intero, la funzione fratta $1/(1-x)(1-x^2)(1-x^4) \ldots (1 - x \upharpoonright 2^p)$ è uguale alla serie $D(2^p, 2^p) + D(2^p, 2^p + 1)x + D(2^p, 2^p + 2)x^2 + D(2^p, 2^p + 3)x^3 + \ldots$".

In simboli:

(29) $x \in -1^{-}1 . p \in N_0 . \supset . 1/\Pi[(1 - x^m) | m, 2^{0 \cdots p}] =$
$\Sigma[D(2^p, 2^p + n) x^n | n, N_0]$.

Si può dimostrare per induzione rispetto a p, tenendo conto della (20): ovvero, quando $p > 0$, moltiplicando le serie assolutamente convergenti nelle quali si sviluppano le funzioni fratte $1/(1-x)$, $1/(1-x^2)$, ..., $1/(1 - x \upharpoonright 2^p)$, e tenendo poi conto della (19).

(*)
(24′) $n \in N_1 . \supset . D(2, n) = E(n/2)$.
(25′) " $. \supset . D(4, n) = E(n/4) \times E(n/4 + 1/2) =$
$E\{[E(n/2)]^2/4\} =$ " $\times [E(n/2) - E(n/4)]$.
(26′) $n \in N_1 . q_1 = E(n/2) . q_2 = E(n/4) . q_3 = E(n/8) . \supset .$
$D(8, n) = q_1 q_2 q_3 - q_1 q_3^2 - q_2^2 q_3 + C(2q_3 + 1, 3)$.
(A) $n \in N_1 . \supset . D(4, n+2) - D(4, n) = E(n/4 + 1/2)$.
$D(8, n+2) - D(8, n) = E(n/8 + 3/4) \times E(n/8 + 1/4)$.
$D(8, n+4) -$ " $= E[(n+3)/4] \times \{n - 2E[(n-1)/4]\}$.
$D(4, 2n) + D(4, 2n+2) = n(n+1)/2$.
$D(4, n+1) - D(4, n) = \mathrm{rest}(n, 2) \times E[(n+1)/4]$.
" + " $= E(n^2/8)$.

Si noti dunque il teorema d'aritmetica:

$n \in N_0 . \supset . E(n/4) \times E[(n+2)/4] + E[(n+1)/4] \times E[(n+3)/4] = E(n^2/8)$.

La serie: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 21, 24, ... dei numeri: $D(4, n) + D(4, n+1)$, quando $n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, si rappresenta, in una prima ricerca, con l'espressione: $q(n - 2q)$, dove $q = E[(n+1)/4]$; espressione che, perciò $= E(n^2/8)$.

18. — E allora, nella stessa ipotesi per x, si consideri la serie doppia:

$$\begin{array}{l} 1 + D(1,1)x + \\ + D(1,2)x^2 + D(1,3)x^3 + D(1,4)x^4 + D(1,5)x^5 + \ldots + D(1,8)x^8 + \ldots \\ + D(2,2)x^2 + D(2,3)x^3 + D(2,4)x^4 + D(2,5)x^5 + \ldots + D(2,8)x^8 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + D(4,4)x^4 + D(4,5)x^5 + \ldots + D(4,8)x^8 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + D(8,8)x^8 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sommando per orizzontali, si ha la serie:

$$a) \quad 1 + x(1-x) + x^2(1-x)(1-x^2) + x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^4) + \ldots,$$

che è assolutamente convergente, come si può vedere applicando il criterio del rapporto di un termine al precedente alla serie dei valori assoluti. Sommando per verticali, e tenendo conto della (11), si ha la serie: $D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots$, cioè la serie della (3), pure assolutamente convergente. Dunque:

$$(30) \qquad x \in -1^{\frown}1 \,.\, \supset .\, 1 / \Pi[(1-x^i)|i, 2^{N_0}] = 1 + \\ \Sigma\{x \upharpoonright 2^p / \Pi[(1-x^m)|m, 2^{0\cdots p}]|p, N_0\};$$

cioè: " se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, la funzione fratta $1/(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\ldots$ è uguale alla serie *a)* ".

19. — L'identico procedimento, applicato alla stessa serie doppia, nella quale, però, le orizzontali si seguano con segni alterni, ci dà, in virtù della (13), e dopo semplici riduzioni:

$$(31) \qquad x \in -1^{\frown}1 \,.\, \supset . \\ = 1/(1-x) - x/(1-x)(1-x^2) + x^3/(1-x)(1-x^2)(1-x^4) - \ldots \\ = \Sigma\{(-1)^p x \upharpoonright (2^p - 1) / \Pi[(1-x^m)|m, 2^{0\cdots p}]|p, N_0\}.$$

Ulteriori ricerche intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi

Nota di FILIPPO SIBIRANI, a Pavia

1. — In una mia Nota inserita nel vol. 52 di questi *Atti* (*) ho studiate alcune soluzioni del problema seguente, analogo a quello dei tre corpi: Un punto P_1 attira un punto P_2 e P_2 respinge P_1 con forza d'intensità direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente al quadrato delle distanze. Se la massa repellente è minore dell'attraente e sotto speciali condizioni iniziali (determinate nel § 2 della citata Nota) P_1 e P_2 ruotano uniformemente intorno ad un punto fisso O. In questa ipotesi un punto P, di massa tanto piccola rispetto a quelle di P_1 e P_2 da potersi trascurare la sua azione su P_1 e P_2, si muove sotto l'attrazione di P_1 e la repulsione di P_2.

Nella Nota citata sono determinati i centri di librazione, cioè i punti di equilibrio di P relativo al moto di rotazione di $P_1 P_2$ e sono studiati i moti che mantengono P nelle immediate vicinanze dei centri di librazione.

Si suppone P_1 di massa 1 e P_2 di massa $\mu < 1$, la distanza $P_1 P_2$ si assume come unità di lunghezza; il moto si riferisce ad una terna di assi ortogonali, aventi origine nel punto fisso O, l'asse x coincidente con la retta $P_1 P_2$ e col senso positivo da P_1 a P_2, il semiasse positivo y sia quello che si ottiene ruotando di un angolo retto il semiasse positivo x nel senso della rotazione della retta $P_1 P_2$; l'asse z abbia per senso positivo quello secondo cui la rotazione della $P_1 P_2$ apparisce avvenire da sinistra a destra.

(*) *Intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi* (pp. 135-161).